| | | |
|---|---|---|
| Lycée Kheniss | Devoir de contrôle N°3 | Prof : |
| | Mathématiques<br>Durée : 2h | 4 $^{\text{éme}}$ Sc.Exp |

EXERCICE N°4

1) On dispose de deux urnes : $U_1$ contenant 3 boules blanches et 2 noires

$U_2$ contenant 1 boule blanche et 4 noires

On tire au hasard et simultanément 2 boules de $U_1$ et successivement et sans remise 3 boules de $U_2$.

On désigne par X l'aléa numérique égal au nombre de boules blanches tirées.

a) Montrer que p (« X= 0 ») = 1/25 puis déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer E(X) et V(X)

2) On répète l'épreuve précédente 4 fois de suite en remettant à chaque fois les boules dans leurs urnes respectives.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « obtenir trois fois 5 boules noires »

B : « obtenir pour la première fois 5 boules noires au troisième tirage ».

3) On considère maintenant n urnes ($n \geq 3$). L'urne $U_1$ contient 3 boules blanches et 2 noires et chacune des autres urnes contient 1 blanche et 4 noires.

On tire une boule de $U_1$ que l'on met dans $U_2$, puis une boule de $U_2$ que l'on met dans $U_3$ et ainsi de suite jusqu'à tirer une boule de l'urne $U_n$.

Soit $E_k$ l'évènement : « la boule tirée de $U_k$ est blanche » ($1 \leq k \leq n$)

a) Calculer $p_1 = p(E_1)$ et $p_2 = p(E_2)$

b) Soit $p_k = p(E_k)$. Montrer que $p_{k+1} = \frac{1}{6} p_k + \frac{1}{6}$.

En déduire que $p_k = \frac{2}{5}(\frac{1}{6})^{k-1} + \frac{1}{5}$

**PROBLEME**

**I)** On considère la fonction g définie sur IR par g(x) = $e^x - x$

**1)** Etudier les variations de g. Calculer g (0)

**2)** On pose f(x) = $\dfrac{e^x}{e^x - x}$

a) En déduire à partir des variations de g que f est définie sur IR et que $\forall x \in IR$ , f(x) > 0

b) Calculer les limites de f en (-$\infty$) et en (+$\infty$). Interpréter graphiquement ces résultats

c) Etudier la position de $(C_f)$ par rapport à la droite D : y =1 pour x $\geq$ 0.

**3)** Etudier les variations de f et construire $(C_f)$ dans un repère orthonormé R = $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(Unité graphique : 2cm)

**II)** On pose $U_n$ = $\int_0^n f(x)dx$ , n$\in$ IN

**1)** Donner une interprétation géométrique de $U_n$

**2)** Etudier la monotonie de la suite ($U_n$)

**3)** a) Montrer que pour tout réel x, f(x) = 1 + $\dfrac{x}{e^x - x}$

b) Montrer que pour tout entier n$\in$ IN, $U_n$ = n + $\int_0^n \dfrac{x}{e^x - x} dx$

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

**III)** Soit ($V_n$) la suite définie par $V_n$ = $U_n$ – n = $\int_0^n \dfrac{x}{e^x - x} dx$

**1)** Montrer que ($V_n$) est une suite croissante.

**2)** a) Montrer que pour tout x $\geq$ 0, on a : $e^x - x \geq \dfrac{e^x}{2}$

b) En déduire que pour tout n$\in$ IN, $V_n \leq \int_0^n 2xe^{-x} dx$

c) Calculer $\int_0^n 2xe^{-x} dx$ en fonction de n.

d) En déduire que, pour tout n$\in$ IN, $V_n$ $\leq$ 2.

**3)** En déduire que la suite ($V_n$) est convergente.

**BON TRAVAIL**